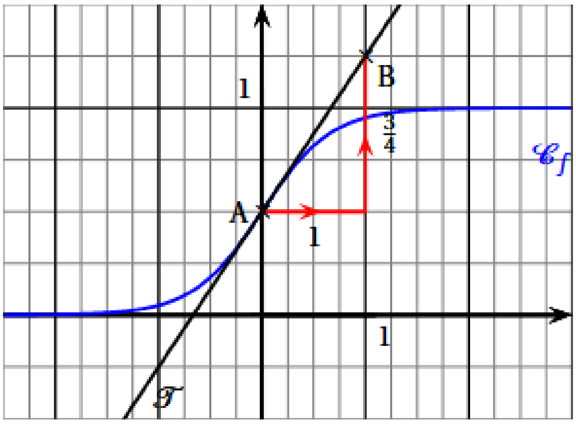
Corrigé Exercice 1 (2023 – Centres Etrangers Groupe 2 – Sujet 2)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$



Partie A : lectures graphiques

1. Comme indiqué sur la figure pour aller de A en B points de la tangente : + 1 puis $+\frac{3}{4}$, donc coefficient directeur de $\frac{3}{4}$ et l'ordonnée à l'origine est égale à $\frac{1}{2}$.

   $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

2. La fonction semble être convexe sur $]-\infty\,;\,0]$ et concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B : étude de la fonction

1. En posant $u(x) = 1+\mathrm{e}^{-3x}$, on a pour tout réel $u'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$.

   De $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, on a donc $f'(x) = -\frac{u'(x)}{u(x)^2} = -\frac{-3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2} = \frac{3\mathrm{e}^{-3x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2}$.

2. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-3x} > 0$, donc $1+\mathrm{e}^{-3x} > 1 > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^2 > 0$: tous les termes de la dérivée sont supérieurs à zéro ; on a donc $f'(x) > 0$, sur $\mathbb{R}$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** Avec $X = -3x$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$, d'où $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathrm{e}^X = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-3x} = 1$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$.

   Rem. la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

b. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-3x} = +\infty$, puis $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 + \mathrm{e}^{-3x}$ et enfin $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0$.

Rem. la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de moins l'infini.

4. On a $f(x) = 0,99 \iff \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}} = 0,99 \iff 1 = 0,99\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff 1 = 0,99 + 0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff$ $0,01 = 0,99\mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{0,01}{0,99} = \mathrm{e}^{-3x} \iff \dfrac{1}{99} = \mathrm{e}^{-3x}$.

Par croissance de la fonction logarithme népérien :

$\ln\left(\dfrac{1}{99}\right) = \ln\left(\mathrm{e}^{-3x}\right) \iff \ln 1 - \ln 99 = -3x \iff -\ln 99 = -3x \iff x = \dfrac{\ln 99}{3}$ (valeur approchée à la calculatrice 1,532).

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On a $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.

- $f(0) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$;
- $f'(0) = \dfrac{3}{(1+1)^2} = \dfrac{3}{4}$. Donc :

$M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}(x-0) \iff y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$.

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Comme $9\mathrm{e}^{-3x} > 0$ et $\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{-3x} - 1$:

- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} = 1 \iff -3x = \ln 1 = 0 \iff x = 0$;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} > 1 \iff -3x > \ln 1 = 0 \iff x < 0$;
- $\mathrm{e}^{-3x} - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^{-3x} < 1 \iff -3x < \ln 1 = 0 \iff x > 0$;

3. **a.** La question précédente a montré que la dérivée seconde est positive sur $]-\infty\,;\,0[$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.

b. La dérivée seconde s'annule en $x = 0$ en changeant de signe, donc le point A de la courbe représentative d'abscisse 0 est le point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.

c. En chacun des points de l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est convexe donc au dessus de toutes les tangentes et en particulier de la tangente $\mathscr{T}$ en A.

De même en chacun des points de l'intervalle $[0\,;\,+\infty]$ la courbe $\mathscr{C}_f$ est concave sur donc au dessous de toutes les tangentes et en particulier de la tangente $\mathscr{T}$.

En A la courbe et la tangente $\mathscr{T}$ ont le point $\mathrm{A}\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ en commun.

Corrigé Exercice 2 (2023 – Amérique du Sud - Jour 1)

Partie A

$$f(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x).$$

1. • Limite en 0 : On sait que $\lim_{x\to 0} x^2 \ln(x) = 0$, que $\lim_{x\to 0} x = 0$, donc par somme de limites : $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.
   • Limite en $+\infty$: en écrivant $f(x) = 1 + x^2(1 - 2\ln(x))$, on a :
   $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} -2\ln(x) = -\infty$, puis $\lim_{x\to+\infty} 1 - 2\ln(x) = -\infty$ et enfin par produit de limites :
   $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
2. Pour tout réel de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2x - 4x\ln(x) - 2x^2 \times \frac{1}{x} = 2x - 4x\ln(x) - 2x = -4x\ln(x)$.
3. Puisque $x \geqslant 0$, le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $\ln(x)$.
   On sait que $\ln(x) < 0$ sur $[0\,;\,1[$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0\,;\,1[$ et que
   $\ln(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.
   La fonction f est donc :
   • croissante sur $[0; 1]$ de 1 à $f(1) = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 0 = 2$;
   • décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ de 2 à moins l'infini.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 1	↗	2	↘	$-\infty$

4. La fonction f est continue car dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty]$ et décroissante de 2 à moins l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, avec $\alpha \in]1\,;\,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   Comme $f(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1 - 2\ln \mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2(1-2) = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6,4$.
   En appliquant le même théorème, on a donc $1 < \alpha < \mathrm{e}$.

On admet dans la suite de l'exercice, que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $]0; 1]$.
Rem. : comme $0 \notin [1\,;\,2]$ le même théorème montre qu'il n'existe pas de réel $\beta \in [0\,;\,1]$ tel que $f(\beta) = 0$.

5. On part de l'intervalle $[1; 2{,}7]$, (avec $e \approx 2{,}7$) `dichotomie(1)` donne par dichotomie un encadrement de α par deux réels a et b tels que $b - a \leqslant 10^{-1}$.
Comme $\alpha \approx 1{,}9$, C et D sont exclus et A ne donne pas un encadrement au dixième : reste la proposition B.

Partie B

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, par

$$g(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

On admet que g est dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
On note $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$.

1. g est un quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur étant non nul (supérieur ou égal à 1), donc quel que soit $x \in]0\,;\,+\infty[$:
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times\left(1+x^2\right) - 2x\ln(x)}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x}}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1+x^2-2x^2\ln(x)}{x\left(1+x^2\right)^2} = \frac{f(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}.$$

2. Le résultat précédent montre que puisque $x > 0$ et $\left(1+x^2\right)^2 > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui du numérateur donc le signe de $f(x)$.
Or on a vu (Partie A question 3.) que $f(x) > 0$ sur $]0\,;\,\alpha[$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.
La fonction g est donc croissante sur $[0\,;\,\alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ avec un maximum $g(\alpha)$.
Rem. : on sait que $f(\alpha) = 0 \iff 1+\alpha^2-2\alpha^2\ln\alpha \iff 2\alpha^2\ln\alpha = 1+\alpha^2 \iff$ $\ln\alpha = \dfrac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$.
Donc $g(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)}{1+\alpha^2} = \dfrac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

3. On note T_1 la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 1 et on note T_α la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse α.
   - On a $M(x\,;\,y) \in T_1 \iff y - g(1) = g'(1)(x-1) \iff y - 0 = \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$;
   - On a vu que la fonction a un maximum en α et en ce point le nombre dérivé égal au coefficient directeur de la tangente en ce point (donc T_α) est nul : la tangente est donc horizontale d'équation $y = g(\alpha)$ ou $y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.

Donc $M(x\,;\,y) \in T_1 \cap T_\alpha \iff \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\alpha^2}$, soit
$x - 1 = \dfrac{1}{\alpha^2} \iff x = 1 + \dfrac{1}{\alpha^2}$ et $y = \dfrac{1}{2\alpha^2}$.
Donc $T_1 \cap T_\alpha\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}\,;\,\dfrac{1}{2\alpha^2}\right)$.